Lehrplananbindung: Ph 9.3 Kinematik und Dynamik – Bewegungsfunktionen

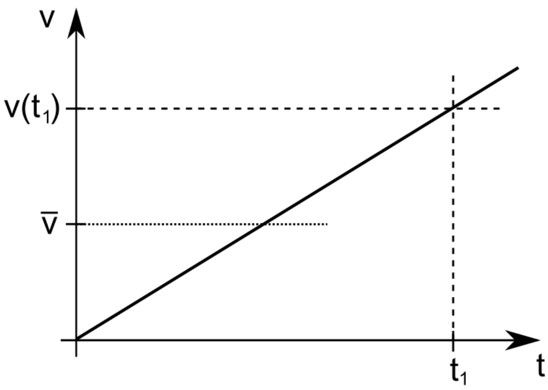
Unterrichtsskizze: Mögliche Vorgehensweisen bei der Erarbeitung des Terms der Zeit-Ort-Funktion bei konstanter Beschleunigung

Vorausgesetzt wird jeweils die Kenntnis des Graphen und des Terms der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion. Diese Inhalte sind aufbauend auf den Kenntnissen über lineare Funktionen leicht zu erarbeiten.

Der Term der Bewegungsfunktion x(t) wird jeweils für einen der möglichen Fälle (positive Geschwindigkeit und positive Beschleunigung) hergeleitet. Die weiteren Fälle wären prinzipiell in gleicher Weise zugänglich, der Erkenntnisgewinn ist dabei aber in Relation zum Aufwand eher gering. Es genügt, mitzuteilen, dass sich die gefundene Formel leicht auf alle weiteren Fälle verallgemeinern lässt.

(1) Zugang über die Durchschnitsgeschwindigkeit

für $v_0 = 0$:



Für das eingezeichnete Zeitintervall [0 ; t_1] gilt mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ für den zum Zeitpunkt t_1 erreichten Ort $x(t_1)$ mit $x(0) = 0$:

$$x(t_1) = \bar{v} \cdot t_1 .$$

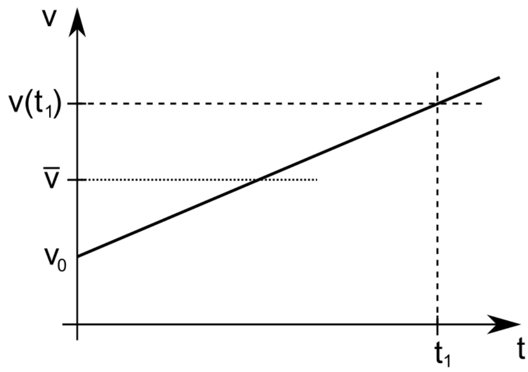
$v(t)$ nimmt gleichmäßig von 0 auf $v(t_1)$ zu, damit ist

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v(t_1) .$$

Mit $v_0 = v(0) = 0$ ist $v(t) = a \cdot t$. Durch Einsetzen erhält man schließlich

$$x(t_1) = \left(\frac{1}{2} a \cdot t_1\right) \cdot t_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$$

für $v_0 \neq 0$:



Auch hier gilt für den zum Zeitpunkt t_1 erreichten Ort $x(t_1)$ mit $x(0) = 0$:

$$x(t_1) = \bar{v} \cdot t_1 .$$

$v(t)$ nimmt gleichmäßig von v_0 auf $v(t_1)$ zu, damit ist

$$\bar{v} = \frac{1}{2}\left(v_0 + v(t_1)\right) = \frac{1}{2}\left(v_0 + \left(v_0 + a \cdot t_1\right)\right) =$$

$$= v_0 + \frac{1}{2} a t_1$$

Einsetzen ergibt

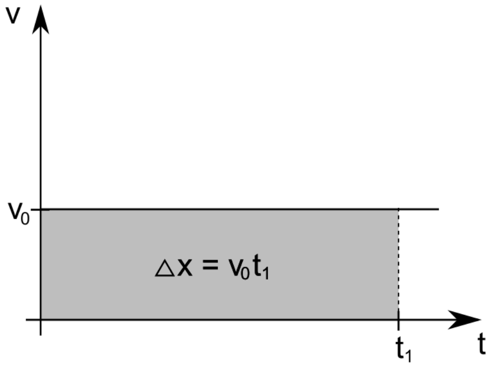
$$x(t_1) = \left(v_0 + \frac{1}{2} a \cdot t_1\right) \cdot t_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

(2) Zugang über Flächenbetrachtungen

Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit:

Zurückgelegter Weg Δx zum Zeitpunkt t_1:

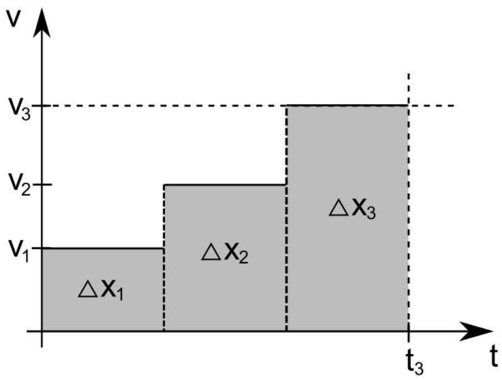
$$\Delta x = v_0\, t_1 .$$



Bewegung mit stufenweise wachsender Geschwindigkeit:

Zurückgelegter Weg Δx zum Zeitpunkt t_3:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 .$$



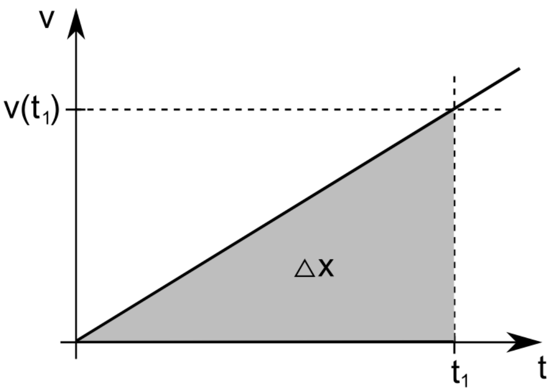
Bewegung mit konstanter Beschleunigung:

Geschwindigkeit $v\left(t_1\right)$ zum Zeitpunkt t_1:

$$v\left(t_1\right) = a \cdot t_1$$

Zurückgelegter Weg Δx zum Zeitpunkt t_1: Dreiecksfläche.

$$\Delta x = \frac{1}{2} v\left(t_1\right) \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot a t_1 \cdot t_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$$



Bewegung mit konstanter Beschleunigung und Anfangsgeschwindigkeit:

Geschwindigkeit $v\left(t_1\right)$ zum Zeitpunkt t_1:

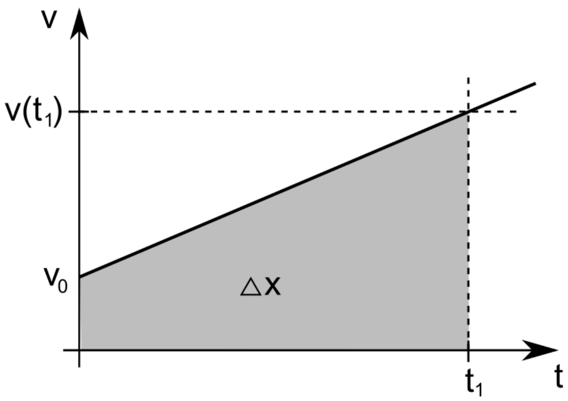
$$v\left(t_1\right) = v_0 + a \cdot t_1$$

Zurückgelegter Weg Δx zum Zeitpunkt t_1: Trapezfläche.

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(v_0 + v\left(t_1\right)\right) \cdot t_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(v_0 + \left(v_0 + a t_1\right)\right) \cdot t_1 =$$

$$= v_0\, t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$



(3) Zugang über die Änderung der kinetischen Energie

Beschleunigung aus der Ruhe ($v_0 = 0$):

$E_{kin} = W_{Beschl} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 = F \cdot \Delta x$; mit $v = a \cdot t_1$ und $F = m \cdot a$ erhält man so

$$\frac{1}{2} m (a \cdot t_1)^2 = m \cdot a \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = \frac{1}{2} a t_1^2 .$$

Beschleunigung mit Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 \neq 0$):

$E_{kin} = E_{kin,0} + W_{Beschl} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + F \cdot \Delta x$; mit $v = v_0 + a \cdot t_1$ und $F = m \cdot a$ erhält man

$$\frac{1}{2} m (v_0 + a \cdot t_1)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m \cdot a \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} v_0^2 + v_0 a t_1 + \frac{1}{2} a^2 t_1^2 = \frac{1}{2} v_0^2 + a \Delta x .$$

Aufgelöst ergibt sich daraus $\Delta x = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$.